

Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям¹

Г. Гельмгольц

До сих пор интегралы уравнений гидродинамики отыскивались почти исключительно в том предположении, что прямоугольные компоненты скорости каждой жидкой частицы могут быть приравнены производным, взятым по соответственным направлениям от некоторой определенной функции, которую мы условимся называть *потенциалом скоростей*^[1]. И, действительно, еще Лагранж² доказал, что это предположение допустимо во всех тех случаях, когда движение жидкой массы возникло и продолжается под действием сил, которые сами могут быть представлены как производные от потенциала сил; он далее показал, что и влияние движущихся твердых тел, которые приходят в соприкосновение с жидкостью, не изменяет пригодности этого предположения. Но так как большинство поддающихся точному математическому определению сил природы может быть представлено в виде производных от потенциала сил, то отсюда и большая часть подлежащих математическому рассмотрению случаев движения жидкости принадлежит именно к тем, при которых существует потенциал скоростей.

Между тем, уже Эйлер³ обратил внимание на то, что существуют и такие случаи движения жидкости, при которых не имеет места потенциал скоростей, например вращение жидкости около оси при одинаковой угловой скорости всех частиц. К силам, способным вызвать такого рода движение, принадлежат силы магнитные, действующие на жидкость, по которой пробегает электрический ток, и в особенности трение частиц жидкости между собой и о твердые тела. Влияние трения в жидкостях^[2] до сих пор еще не поддавалось математическому определению, а между тем во всех случаях, где дело идет не о бесконечно малых колебаниях, оно очень велико и порождает весьма значительные отклонения от теории. Трудность определения этого влияния и отыскания метода для его измерения обуславливались, главным образом, пожалуй, тем, что не имелось вовсе наглядного представления о формах таких движений, которые вызываются в жидкости трением. В этом отношении мне казалось поэтому весьма важным подвергнуть исследованию формы движения, при которых не существует потенциала скоростей.

Дальнейшее исследование покажет нам, что в тех случаях, где существует потенциал скоростей, мельчайшие частицы жидкости не имеют вращательного движения, но, по крайней мере, часть жидких частиц находится во вращении, поскольку потенциал скоростей не имеет места.

¹ Г. Гельмгольц. *Основы вихревой теории*. М.-Ижевск: ИКИ, 2002.

² *Mécanique analytique*. Paris, 1815. Т. II, p. 304.

³ *Histoire de l'Acad. des Sciences de Berlin*. An. 1755, p. 292.

Вихревыми линиями я называю линии, проведенные в жидкой массе таким образом, что их направление повсюду совпадает с направлением мгновенной оси вращения лежащих на них частиц жидкости.

Вихревыми нитями я называю части жидкой массы, которые выделяются из нее, если через все точки контура бесконечно малого элемента поверхности провести соответственные вихревые линии.

Исследование показывает, что если для всех сил, действующих на жидкость, существует потенциал сил, то:

1) ни одна жидкая частица не может прийти во вращательное движение, если только она не обладала им уже с самого начала;

2) жидкие частицы, расположенные для какого-нибудь момента времени на вихревой линии, всегда будут и при своем перемещении принадлежать одной и той же вихревой линии;

3) произведение поперечного сечения на скорость вращения для бесконечно тонкой вихревой нити на всем ее протяжении постоянно и сохраняет свою величину при передвижении нити. Поэтому вихревые нити должны внутри жидкости замыкаться в себе; они могут оканчиваться не иначе, как на ее границах.

Это последнее положение дает возможность определить скорости вращения, если дана форма соответственных вихревых нитей для различных моментов времени⁴. Далее разрешается задача об определении скоростей жидких частиц для известного момента времени, если для этого момента даны скорости вращения; при этом остается неопределенной только одна произвольная функция, которую нужно определить так, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Эта последняя задача приводит нас к замечательной аналогии между вихревыми движениями жидкости и электромагнитными действиями электрических токов. Именно, если в односвязном⁵ пространстве, заполненном движущейся жидкостью, существует потенциал скоростей, то скорости жидких частиц совпадают по величине и направлению с теми силами, которые проявили бы известным образом распределенные на поверхности пространства магнитные массы на магнитную частицу, помещающуюся внутри него. Если же, напротив, в таком пространстве существуют вихревые нити, то скорости жидких частиц нужно положить равными силам, возникающим от действия на частицу замкнутых электрических токов, которые частью проходят по вихревым нитям внутри массы, частью по ее поверхности, и сила которых пропорциональна произведению поперечного сечения вихревых нитей на скорость вращения.

Ввиду этого в дальнейшем я позволю себе часто воображать присутствие магнитных масс или электрических токов для того только, чтобы, пользуясь этим, получить более краткое и наглядное выражение для природы функций, которые являются именно такими функциями от координат, как потенциальные функции или силы притяжения указанных масс или токов на магнитную частицу.

Благодаря этим положениям, целый ряд форм движения, скрытых в неразработанном классе интегралов уравнений гидродинамики, становится, по крайней мере, доступным представлению, хотя окончательное выполнение интегрирования возможно лишь для немногих простейших случаев, когда имеется только одна или две прямолинейные или круговые вихревые нити в безграничных или только отчасти ограниченных бесконечной плоскостью жидких массах.

⁴Решения этой задачи Гельмгольцем не дано. — *Прим. ред.*

⁵Я употребляю это выражение в таком же смысле, в каком Riemann (Crelle's Journal, Bd. LIV. S. 108) говорит об односвязных и многосвязных поверхностях. Так что n -связное пространство есть такое пространство, которое можно пересечь не более, как $(n - 1)$ поверхностями, не разделяя его на две совершенно разъединенные части. Так кольцо в этом смысле есть двусвязное пространство. Пересекающие поверхности должны быть вполне ограничены замкнутой линией, по которой они пересекают границы пространства.

Можно доказать, что прямолинейные параллельные вихревые нити в жидкой массе, ограниченной только перпендикулярными к нитям плоскостями, вращаются вокруг общего их центра тяжести, если для определения этой точки принимать скорость вращения равной плотности массы. Положение центра тяжести остается неизменным. Наоборот, в случае круговых вихревых нитей, которые все расположены перпендикулярно к общей оси, центр тяжести их поперечного сечения перемещается параллельно этой оси.

1. Определение вращения

Пусть внутри капельной жидкости в точке, определяемой прямоугольными координатами x, y, z для времени t , давление равно p ; компоненты скорости, параллельные трем координатным осям, суть u, v, w ; компоненты внешних сил, действующих на единицу жидкой массы X, Y, Z , и плотность, изменения которой мы принимаем исчезающе малыми, равна h ; тогда для точек ³⁾ внутри жидкости, как известно, имеют место такие уравнения движения:

$$(1) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ Y - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

До сих пор рассматривали почти исключительно такие случаи, где не только силы X, Y, Z имеют потенциал V , так что могут быть представлены в форме:

$$(1a) \quad X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

но где, кроме того, можно найти и потенциал скоростей ¹⁾ ϕ , так что

$$(1b) \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Этим задача значительно упрощается, так как три первых уравнения (1) дают одно общее интегральное уравнение, из которого можно найти p , определив предварительно ϕ из четвертого уравнения, которое в данном случае принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

и таким образом совпадает с известным дифференциальным уравнением для потенциала магнитных масс, помещающихся вне пространства, для которого должно иметь место это уравнение. Известно также, что всякая функция ϕ , удовлетворяющая этому дифференциальному уравнению внутри односвязного⁶ пространства, может быть представлена, как потенциал известного

⁶В многосвязных пространствах ϕ может сделаться многозначной, а для многозначных функций, удовлетворяющих указанному дифференциальному уравнению, основной закон теории электричества Green'a (Crelle's Journal, Bd. XLIV. S. 360) не имеет силы, а, следовательно, не имеет места и большая часть вытекающих из нее положений, выведенных Gauss'ом и Green'ом^[4] для магнитных потенциальных функций, которые по своей природе всегда однозначны.

распределения магнитных масс на его границах, как я об этом упоминал уже во введении. Для того чтобы подстановки, указанные уравнением (1b), имели место, необходимо, чтобы:

$$(1c) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Чтобы уяснить себе механический смысл этих трех условий, мы можем представить себе, что изменение, которое претерпевает бесконечно малый объем жидкости в элемент времени dt , складывается из трех различных движений: 1) перемещения жидкой частицы в пространстве; 2) растяжения или сжатия частицы по трем главным направлениям растяжения, причем всякий прямоугольный параллелепипед жидкости, стороны которого параллельны главным направлениям растяжения, остается прямоугольным, так что стороны его хотя и изменяются по длине, но тем не менее остаются параллельными прежним направлениям; 3) из поворота около произвольно направленной мгновенной оси вращения, причем этот поворот по известной теореме всегда можно рассматривать, как результат сложения трех поворотов около осей координат^[5].

Положим, что для точки с координатами \mathfrak{x} , \mathfrak{y} и \mathfrak{z} выполнены условия (1c); обозначим значения u , v и w и их производные в этой точке следующим образом:

$$\begin{aligned} u = A, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha, \\ u = B, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \beta, \\ u = C, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = c, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma. \end{aligned}$$

Для точек, координаты которых x , y и z бесконечно мало отличаются от \mathfrak{x} , \mathfrak{y} и \mathfrak{z} , мы получим:

$$\begin{aligned} u &= A + a(x - \mathfrak{x}) + \gamma(y - \mathfrak{y}) + \beta(z - \mathfrak{z}), \\ v &= B + \gamma(x - \mathfrak{x}) + b(y - \mathfrak{y}) + \alpha(z - \mathfrak{z}), \\ w &= C + \beta(x - \mathfrak{x}) + \alpha(y - \mathfrak{y}) + c(z - \mathfrak{z}), \end{aligned}$$

или, положив:

$$\begin{aligned} \phi &= A(x - \mathfrak{x}) + B(y - \mathfrak{y}) + C(z - \mathfrak{z}) + \\ &+ \frac{1}{2}a(x - \mathfrak{x})^2 + \frac{1}{2}b(y - \mathfrak{y})^2 + \frac{1}{2}c(z - \mathfrak{z})^2 + \\ &+ \alpha(y - \mathfrak{y})(z - \mathfrak{z}) + \beta(x - \mathfrak{x})(z - \mathfrak{z}) + \gamma(x - \mathfrak{x})(y - \mathfrak{y}), \end{aligned}$$

имеем

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Известно, что надлежащим выбором направления прямоугольных координат x_1 , y_1 и z_1 с началом в точке $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ можно выражение для ϕ привести к такому виду:

$$\phi = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + \frac{1}{2}a_1 x_1^2 + \frac{1}{2}b_1 y_1^2 + \frac{1}{2}c_1 z_1^2;$$

разложенные по этим новым осям координат скорости u_1 , v_1 и w_1 получают значения:

$$u_1 = A_1 + a_1 x_1, \quad v_1 = B_1 + b_1 y_1, \quad w_1 = C_1 + c_1 z_1.$$

Таким образом скорость u_1 , параллельная оси x_1 , одна и та же для всех жидких частиц, для которых x_1 имеет одну и ту же величину; иначе, частицы, лежавшие в начале элемента времени dt

в плоскости, параллельной плоскости $y_1 z_1$, находятся в такой же и в конце элемента времени dt . То же самое справедливо и для плоскостей $x_1 y_1$ и $x_1 z_1$. Таким образом, если мы вообразим себе параллелепипед, ограниченный тремя плоскостями, параллельными трем упомянутым координатным плоскостям и бесконечно близкими к ним, то заключающиеся в нем жидкие частицы и по истечении элемента времени dt образуют прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны тем же координатным плоскостям. Все движения такого бесконечно малого параллелепипеда при условии (1с) складывается таким образом лишь из поступательного передвижения в пространстве и из растяжения или сжатия его ребер; вращательного же движения в этом случае совершенно нет.

Возвратимся к нашей первой системе координат x, y, z и вообразим себе, что к рассмотренным движениям бесконечно малых масс жидкости, окружающих точку $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, присоединяются еще вращательные движения около осей, параллельных осям x, y, z и проходящих через точку $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Если угловые скорости этих вращательных движений соответственно равны ξ, η, ζ , то вносимые ими компоненты скорости, параллельные координатным осям x, y, z , будут соответственно

$$\begin{array}{ccc} 0, & (z - \mathfrak{z})\xi, & -(y - \mathfrak{y})\xi; \\ -(z - \mathfrak{z})\eta, & 0, & (x - \mathfrak{x})\eta; \\ (y - \mathfrak{y})\zeta, & -(x - \mathfrak{x})\zeta, & 0. \end{array}$$

Скорости частицы, координаты которой x, y, z выразятся тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A + a(x - \mathfrak{x}) + (\gamma + \zeta)(y - \mathfrak{y}) + (\beta - \eta)(z - \mathfrak{z}), \\ v &= B + (\gamma - \zeta)(x - \mathfrak{x}) + b(y - \mathfrak{y}) + (\alpha + \xi)(z - \mathfrak{z}), \\ w &= C + (\beta + \eta)(x - \mathfrak{x}) + (\alpha - \xi)(y - \mathfrak{y}) + c(z - \mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Дифференцируя, получаем:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\xi, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\zeta. \end{cases}$$

Таким образом, левые части уравнений, которые по уравнениям (1с) должны равняться нулю, раз существует потенциал скоростей, равны удвоенным скоростям вращения соответственных жидких частиц около трех координатных осей. Следовательно, существование потенциала скоростей исключает возможность существования вращательного движения жидких частиц.

Как дальнейшую характерную особенность движения жидкости с потенциалом скоростей, нужно привести здесь то, что в пространстве S , ограниченном неподвижными стенками, совершенно заполненном жидкостью и односвязном, такого движения существовать не может. В самом деле, если мы через n обозначим направленную внутрь нормаль к поверхности такого пространства, то перпендикулярные к стенкам компоненты скорости $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ везде должны быть равны нулю. Тогда по известной теореме⁷ Грина^[6]:

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = - \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\omega,$$

⁷ Уже упоминавшаяся выше теорема в Crelle's Journal, Bd. XLIV. S. 360, не распространяющаяся на многосвязные пространства.

где слева интеграция должна быть распространена на все пространство S , а справа на граничную поверхность, элемент площади которой обозначен $d\omega$. Если теперь $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ на всей поверхности равно нулю, то и интеграл в левой части должен равняться нулю, что возможно лишь в том случае, когда во всем пространстве S

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0,$$

т. е. если совсем не происходит никакого движения жидкости. Таким образом, всякое движение ограниченной жидкой массы в односвязном пространстве, обладающее потенциалом скоростей, необходимо связано с движением поверхности жидкости. Если это движение поверхности, т. е. $\frac{\partial\phi}{\partial n}$, вполне нам дано, то тем самым однозначно определено и движение всей заключенной внутри нее массы жидкости. В самом деле, если бы существовали функции ϕ' и ϕ'' , которые одновременно удовлетворяли бы внутри пространства S уравнению:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,$$

и на поверхности условию: $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \psi$, где ψ обозначает величины $\frac{\partial\phi}{\partial n}$, обусловленные движением поверхности, то и функция $(\phi' - \phi'')$ удовлетворяла бы первому уравнению внутри пространства S , на поверхности же было бы

$$\frac{\partial(\phi' - \phi'')}{\partial n} = 0;$$

отсюда следовало бы, как уже было показано выше, что внутри пространства S

$$\frac{\partial(\phi' - \phi'')}{\partial x} = \frac{\partial(\phi' - \phi'')}{\partial y} = \frac{\partial(\phi' - \phi'')}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, обеим функциям соответствовали бы совершенно те же скорости и внутри всего пространства S .

Таким образом, только в том случае, когда не существует потенциала скоростей, возможны вращения жидких частиц; лишь в этом случае линии тока могут замыкаться внутри односвязного вполне замкнутого пространства. Мы можем поэтому движения, не обладающие потенциалом скоростей, вообще характеризовать как вихревые^[7].

2. Постоянство вихревого движения

Прежде всего определим, как изменяются скорости вращения ξ , η , ζ во время движения, если действуют только силы, допускающие потенциал сил. Замечу, во-первых, вообще, что если ψ есть функция x , y , z и t и возрастает на $\partial\psi$, при возрастании этих четырех величин на dx , dy , dz и dt , то

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}dt + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz.$$

Если мы теперь желаем определить изменение ψ за элемент времени d для некоторой определенной частицы жидкости, то величинам dx , dy и dz нужно дать те значения, которые они имеют для движущейся частицы, а именно:

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt,$$

получаем^[8]

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} + w \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Обозначение $\frac{d\psi}{dt}$ в дальнейшем я буду всегда употреблять в том смысле, чтобы $\frac{d\psi}{dt}dt$ выражало изменение ψ за время dt для одной и той же жидкой частицы, координаты которой в начале времени dt были x, y, z .

Исключая из уравнений (1) дифференцированием величину p , вводя обозначения, подставляя значения из уравнений (2) и принимая, что силы X, Y, Z удовлетворяют уравнениям (1a), получаем следующие три уравнения^[9]:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

или же

$$(3a) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial v}{\partial z} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Если для выбранной частицы ξ, η, ζ одновременно равны нулю, то и

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Таким образом, *жидкие частицы, не находившиеся уже во вращательном движении, не придут в таковое и по истечении некоторого времени.*

Как известно, вращательные движения можно складывать по методу параллелограмма сил. Если ξ, η, ζ суть скорости вращения около координатных осей, то скорость вращения σ ^[10] около мгновенной оси вращения есть

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

а косинусы углов, которые образует эта ось с координатными осями, соответственно равны:

$$\frac{\xi}{\sigma}, \quad \frac{\eta}{\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\zeta}{\sigma}.$$

Если мы в направлении этой мгновенной оси вращения отложим бесконечно малый отрезок $\sigma\varepsilon$, то проекции его на оси координат будут соответственно равны $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ и $\varepsilon\zeta$. Если в точке x, y, z

компоненты скорости суть u , v и w , то на другом конце отрезка $\sigma\varepsilon$ они имеют величины:

$$\begin{aligned}u_1 &= u + \varepsilon\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \\v_1 &= v + \varepsilon\xi \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon\eta \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon\zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \\w_1 &= w + \varepsilon\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon\eta \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon\zeta \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}$$

Таким образом, по истечении времени dt проекции расстояния между обеими частицами, ограничивавшими в начале dt отрезок $\sigma\varepsilon$, получают значения, которые на основании уравнений (3) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon\xi + (u_1 - u)dt &= \varepsilon\left(\xi + \frac{d\xi}{dt}dt\right), \\ \varepsilon\eta + (v_1 - v)dt &= \varepsilon\left(\eta + \frac{d\eta}{dt}dt\right), \\ \varepsilon\zeta + (w_1 - w)dt &= \varepsilon\left(\zeta + \frac{d\zeta}{dt}dt\right).\end{aligned}$$

Слева здесь стоят проекции отрезка $\sigma\varepsilon$ в его новом положении, справа — умноженные на постоянный фактор ε проекции новой скорости вращения; из этих уравнений следует, что линия, соединяющая две частицы, которые в начале времени dt ограничивали отрезок $\sigma\varepsilon$ мгновенной оси вращения, и по истечении времени dt совпадает с изменившейся теперь осью вращения^[11].

Если линию, направление которой везде совпадает с направлением мгновенной оси вращения находящихся на ней жидких частиц, мы назовем, как уже раньше условились, вихревой линией, то мы можем только что полученный вывод формулировать так: *всякая вихревая линия остается постоянно составленной из одних и тех же частиц жидкости и передвигается в жидкости вместе с ними.*

Прямоугольные компоненты угловой скорости увеличиваются в том же отношении, как и проекции отрезка $\sigma\varepsilon$ оси вращения; отсюда следует, что *результатирующая скорость вращения определенной жидкой частицы изменяется в таком же отношении, как расстояние этой частицы от соседних на оси вращения.*

Вообразим себе, что через все точки контура бесконечно малой площади проведены вихревые линии; этим способом мы выделим жидкую нить с бесконечно малым поперечным сечением; будем называть ее вихревой нитью. Объем отрезка такой нити, ограниченного двумя определенными частицами, по только что доказанному остается все время наполненным одними и теми же частицами жидкости; при передвижении объем этот не изменяется^[12], и, следовательно, его поперечное сечение должно изменяться обратно пропорционально длине. Поэтому указанное выше положение можно формулировать и так: *произведение скорости вращения на поперечное сечение в части вихревой нити, состоящей из одних и тех же частиц воды, остается постоянным при передвижении нити.*

Из уравнений (2) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

откуда далее

$$\iiint \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dx dy dz = 0.$$

Это интегрирование может быть распространено на вполне произвольный объем S жидкой массы; проинтегрировав почленно, имеем

$$\iiint \xi dy dz + \iiint \eta dx dz + \iiint \zeta dx dy = 0,$$

причем интегрирование распространяется на всю поверхность объема S . Назовем через $d\omega$ элемент площади этой поверхности и через α, β, γ — углы, которые образует внешняя нормаль к $d\omega$ с осями координат^[13]; тогда

$$dy dz = \cos \alpha d\omega, \quad dx dz = \cos \beta d\omega, \quad dx dy = \cos \gamma d\omega.$$

Следовательно:

$$\iint (\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma) d\omega = 0,$$

или называя через σ результирующую скорость вращения и через ϑ угол ее с нормалью,

$$\iint \sigma \cos \vartheta \cdot d\omega = 0,$$

где интегрирование распространяется на всю поверхность объема S .

Пусть теперь S представляет отрезок вихревой нити, ограниченной двумя бесконечно малыми плоскими элементами ω' и ω'' , перпендикулярными к оси нити; тогда $\cos \vartheta$ для одного из этих элементов равен 1, для другого -1 , на всей остальной поверхности нити равен нулю; пусть далее σ' и σ'' суть скорости вращения в точках сечений ω' и ω'' ; тогда последнее уравнение дает

$$\sigma' \omega' = \sigma'' \omega'',$$

откуда следует: *произведение скорости вращения на поперечное сечение есть величина постоянная на всей длине одной и той же нити*. Что оно не изменяется и при передвижении нити, это было доказано уже раньше.

Из этого положения вытекает также, что вихревая нить нигде внутри жидкости не может пресечься; она либо замыкается внутри жидкости, образуя кольцо, либо распространяется до границ ее. В самом деле, если бы вихревая нить кончалась где-нибудь внутри жидкости, то можно было бы построить замкнутую поверхность, для которой интеграл $\int \sigma \cos \vartheta d\omega$ не равнялся бы нулю.

3. Интегрирование по объему

Если возможно определить движение имеющихся в жидкости вихревых нитей, то с помощью установленных положений вполне определяются и величины ξ, η и ζ . Мы перейдем теперь к задаче об определении скоростей u, v и w по по данным ξ, η и ζ .

Итак, пусть внутри жидкой массы, заполняющей пространство S , даны значения 3-х величин ξ, η и ζ , удовлетворяющие условию:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \quad (2a)$$

Требуется найти u, v и w так, чтобы они внутри всего пространства S удовлетворяли уравнениям:

$$(1)_4 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\xi, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 2\zeta. \end{cases}$$

Сюда присоединяются еще условия, которые должны выполняться на границах пространства S и которые зависят всякий раз от природы задачи. При данном распределении величин ξ , η и ζ может оказаться, что лишь часть вихревых нитей, заключенных внутри пространства S , замыкаются, а все остальные нити достигают границ S и здесь обрываются. Нити этой последней категории всегда можно продолжить либо по поверхности S , либо вне объема S так, чтобы они замкнулись, тогда мы будем иметь большой объем S_1 , который будет заключать в себе лишь замкнутые вихревые нити, и на поверхности которого величины ξ , η , ζ и сами результирующие их σ будут равняться нулю, или, по крайней мере,

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = \sigma \cos \vartheta = 0. \quad (2b)$$

Здесь, как и раньше, α , β и γ обозначают углы между нормалью в соответственной части поверхности S_1 и осями координат, ϑ — угол между нормалью и осью вихревого вращения.

Значения u , v , w , удовлетворяющие уравнениям (1)₄ и (2), мы получаем, полагая:

$$(4) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}. \end{cases}$$

и определяя величины L , M , N и P из условий, чтобы внутри пространства S_1

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2\xi, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = 2\eta, \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = 2\zeta, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \end{cases}$$

Как интегрируются эти уравнения — известно. L , M , N суть потенциальные функции воображаемых магнитных масс, распределенных в пространстве S_1 с плотностями $-\frac{\xi}{2\pi}$, $-\frac{\eta}{2\pi}$ и $-\frac{\zeta}{2\pi}$; P есть потенциальная функция масс, расположенных вне пространства S ^[14]. Обозначим расстояние точки с координатами a , b , c от точки (x, y, z) через r , а величины ξ , η , ζ в точке (a, b, c)

через ξ_a, η_a, ζ_a ; имеем:

$$(5a) \quad \begin{cases} L = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\xi_a}{r} da db dc, \\ M = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\eta_a}{r} da db dc, \\ N = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\zeta_a}{r} da db dc, \end{cases}$$

где интегрирование распространяется на весь объем S_1 и

$$P = \iiint \frac{k}{r} da db dc,$$

где k — произвольная функция от a, b, c и интегрирование распространяется на ту часть S_1 , которая лежит вне объема S . Произвольную функцию k нужно определить так, чтобы выполнялись граничные условия — задача, по своей трудности подобная задачам об электрических и магнитных распределениях. Что величины u, v и w , данные формулами (4), удовлетворяют условию (1)₄, в этом легко убедиться, продифференцировав их и приняв во внимание четвертое из уравнений (5).

Далее, дифференцируя уравнения (4) и принимая во внимание первые три из (5), находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= 2\xi - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 2\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (2) будут также выполнены, если можно будет доказать, что во всем пространстве S_1

$$(5b) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Что это действительно имеет место, ясно из уравнений (5a):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = +\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\xi_a(x-a)}{r^3} da db dc,$$

или, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(\xi_a)}{r} db dc - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_a}{\partial a} da db dc, \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(\eta_a)}{r} da dc - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \eta_a}{\partial b} da db dc, \\ \frac{\partial N}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(\zeta_a)}{r} da db - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_a}{\partial c} da db dc. \end{aligned}$$

Складывая эти три уравнения и называя элемент поверхности S_1 через $d\omega^{[15]}$, получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int (\xi_a \cos \alpha + \eta_a \cos \beta + \zeta_a \cos \gamma) \frac{1}{r} d\omega - \\ - \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi_a}{\partial a} + \frac{\partial \eta_a}{\partial b} + \frac{\partial \zeta_a}{\partial c} \right) da db dc.$$

Но так как внутри всего объема

$$(2a) \quad \frac{\partial \xi_a}{\partial a} + \frac{\partial \eta_a}{\partial b} + \frac{\partial \zeta_a}{\partial c} = 0$$

и на всей поверхности

$$(2b) \quad \xi_a \cos \alpha + \eta_a \cos \beta + \zeta_a \cos \gamma = 0,$$

то оба интеграла равны нулю, и уравнения (5b) так же, как и уравнения (2), удовлетворены. Следовательно, уравнения (4) и (5), или (5a) действительно суть интегралы уравнений (1)₄ и (2).

Из этих формул обнаруживается упомянутая уже во введении аналогия между действием вихревых нитей и электромагнитным действием обтекаемых током проводов, аналогия, которая дает нам очень хорошее средство составить себе наглядное представление о характере вихревых движений.

Если мы вставим в уравнение (4) значения L , M и N из уравнений (5b) и обозначим бесконечно малые части u , v и w , вносимые в интеграл пространственным элементом $da db dc$, через Δu , Δv и Δw , а их равнодействующую через Δp , то:

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi} \frac{(y-b)\zeta_a - (z-c)\eta_a}{r^3} da db dc, \\ \Delta v = \frac{1}{2\pi} \frac{(z-c)\xi_a - (x-a)\zeta_a}{r^3} da db dc, \\ \Delta w = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-a)\eta_a - (y-b)\xi_a}{r^3} da db dc.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\Delta u(x-a) + \Delta v(y-b) + \Delta w(z-c) = 0,$$

т. е. Δp — равнодействующая Δu , Δv , Δw — образует с r прямой угол. Далее:

$$\xi_a \Delta u + \eta_a \Delta v + \zeta_a \Delta w = 0,$$

т. е. та же равнодействующая и с осью вращения в точке a , b , c образует прямой угол. Наконец:

$$\Delta p = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} = \frac{da db dc}{2\pi r^2} \sigma \sin \nu,$$

где σ — результирующая ξ_a , η_a , ζ_a и ν — угол ее с r , определяемый уравнением:

$$\sigma r \cos \nu = (x-a)\xi_a + (y-b)\eta_a + (z-c)\zeta_a.$$

Таким образом, каждая вращающаяся жидкая частица **a** вызывает в каждой другой частице **b** той же жидкой массы скорость, направленную перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения частицы **a** и частицу **b**. Величина этой скорости прямо пропорциональна объему частицы **a**, скорости вращения ее и синусу угла между прямой **ab** и осью вращения, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между обеими частицами.

Совершенно такому же закону следует сила, с которой действовал бы элемент электрического тока, текущего по оси вращения частицы *a* на магнитную частицу, расположенную в *b*^[16].

Это математическое средство двух классов явлений природы имеет свое основание в том, что при существовании в жидкости частицы *a*, вихрей, в тех частях жидкой массы, где нет вращательного движения, существует потенциал скоростей ϕ , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

и только внутри вихревых нитей это уравнение не имеет места. Но если мы представим себе вихревые нити всегда замкнутыми либо внутри жидкой массы, либо вне ее, то пространство, в котором имеет место дифференциальное уравнение для ϕ , будет многосвязным⁸, так как оно останется связным, если мы вообразим в нем секущие поверхности, из которых каждая вполне ограничена вихревой нитью. Но в таких многосвязных пространствах функция ϕ , удовлетворяющая приведенному дифференциальному уравнению, может сделаться многозначной; она и должна быть многозначной, раз существуют замкнутые линии тока; в самом деле, скорости жидкой массы вне вихревых нитей выражаются производными функции ϕ ; поэтому, следуя по линии тока, мы должны получать для ϕ все большие и большие значения. Так как эта линия сама собою замыкается, то, следуя по ней, мы возвратимся, наконец, в ту же точку, из которой вышли, и, таким образом, находим для этого положения второе большее значение ϕ . Так как этот обход можно произвести неограниченное число раз, то для каждой точки такого многосвязного пространства должно существовать бесконечное множество различных значений ϕ , которые разнятся между собой на одну и ту же величину, как это имеет место для различных значений многозначной функции $\arctg\left(\frac{x}{y}\right)$, удовлетворяющей нашему дифференциальному уравнению^[17].

Совершенно так же обстоит дело и с электромагнитными действиями замкнутого электрического тока. Последний оказывает такое же действие на расстоянии, как известное распределение магнитных масс по поверхности, ограниченной проводником. Поэтому, вне самого тока, силы, с которыми он действует на магнитную частицу, могут быть рассматриваемы как производные потенциальной функции V , удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Но и здесь пространство, которое окружает замкнутый проводник тока и для которого это уравнение имеет силу, будет многосвязным, и функция V — многозначной.

Таким образом, при вихревых движениях жидкости так же, как и при электромагнитных действиях скорости или силы вне пространства, занятого вихревыми нитями или электрическими токами, зависят от многозначных потенциальных функций, удовлетворяющих общему дифференциальному уравнению для магнитных потенциальных функций; между тем внутри простран-

⁸Исключительными являются те случаи, когда сама вихревая масса занимает односвязный объем, как, напр., сферический вихрь Хилла. См. Lamb. Hydrodynamics. 1895. — Прим. ред.

ства, занятого вихревыми нитями или электрическими токами, на место потенциальных функций, которые сюда не распространяются, выступают другие функции, определяемые уравнениями (4), (5), (5a). Напротив, при движении жидкости в односвязном пространстве и магнитных силах мы имеем дело с однозначными потенциальными функциями так же, как при тяготении, электрических притяжениях и стационарных электрических и термических токах.

Те интегралы уравнений гидродинамики, при которых существует однозначный потенциал скоростей, мы можем назвать *интегралами первого класса*. Те же интегралы, при которых имеет место вращение некоторой части жидких частиц, и вследствие этого в области частиц, не находящихся во вращении, существует многозначный потенциал скоростей, мы назовем *интегралами второго класса*. В последнем случае иногда задача требует рассмотрения лишь тех частей пространства, которые не включают в себе вращающихся частиц жидкости; например, при движении воды в кольцеобразных сосудах, можно представить себе, что вихревая нить проходит через ось сосуда; таким образом, эта задача принадлежит к числу тех, которые могут быть разрешены, при допущении потенциала скоростей. В гидродинамических интегралах первого класса скорости жидких частиц пропорциональны по величине и совпадают по направлению с силами, которые вызывало бы известное распределение магнитных масс вне жидкости, относительно магнитной частицы, помещенной на месте частицы этой жидкости.

В гидродинамических интегралах второго класса скорости жидких частиц пропорциональны по величине и совпадают по направлению с силами, происходящими от совместного действия на магнитную частицу, с одной стороны, замкнутых электрических токов, текущих по вихревым нитям с напряжением, пропорциональным скорости вращения этих вихревых нитей, и, с другой — магнитных масс, расположенных вне жидкости. Электрические токи перемещались бы внутри жидкости вместе с соответственными вихревыми нитями и сохраняли бы неизменное напряжение. Предполагаемое распределение магнитных масс вне жидкости или по ее границам должно быть определено таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия. Известно затем, что всякая магнитная масса может быть заменена также электрическими токами. Поэтому вместо того, чтобы в выражениях для u , v , и w прибавлять еще потенциальную функцию P вне лежащей массы k , можно получить столь же общее решение, если величинам вне жидкости или даже только на поверхности ее дать произвольные значения, но такие, чтобы образовались лишь замкнутые токи⁹, и затем распространить интеграцию в уравнениях (5a) на все пространство, для которого ξ , η и ζ отличны от нуля.

4. Вихревые поверхности и энергия вихревых нитей

В гидродинамических интегралах первого класса, как я выше показал, достаточно знать движение граничной поверхности. Этим движение внутри жидкости вполне определяется. Напротив того, в интегралах второго класса требуется определить еще движение имеющихся внутри жидкости вихревых нитей, принимая в расчет их взаимное влияние и граничные условия, вследствие чего задача значительно усложняется. Но для некоторых простых случаев все-таки возможно решить и эту задачу, именно для тех случаев, когда вращение жидких частиц происходит лишь на некоторых поверхностях или линиях, причем форма этих поверхностей и линий при передвижении остается неизменной.

Свойства поверхностей, к которым прилежит бесконечно тонкий слой вращающихся частиц жидкости, легко обнаружить из уравнений (5a). Если ξ , η и ζ лишь в бесконечно тонком слое отличны от нуля, то по известным положениям потенциальные функции L , M и N будут иметь на

⁹Произвол и в этом случае стесняется необходимостью выполнить условия на границах. — Прим. ред.

обеих сторонах слоя одинаковые значения, а производные их, взятые в направлении нормали к слою, будут различны. Положим теперь, что оси координат выбраны так, чтобы в рассматриваемом месте вихревой поверхности ось z совпадала с нормалью к поверхности, а ось x с осью вращения жидких частиц на поверхности^[18], так что в этом месте $\eta = \zeta = 0$; тогда потенциалы M и N , а также и их производные будут иметь одни и те же значения на обеих сторонах слоя; то же имеет место для

$$L \frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial y};$$

напротив величина

$$\frac{\partial L}{\partial z}$$

будет иметь два значения, разнящиеся на $2\xi\varepsilon$, если ε обозначает толщину слоя. Уравнения (4) показывают, что u и w обладают одинаковыми значениями на обеих сторонах вихревой поверхности, а v значением, разнящимся на $2\xi\varepsilon$. Таким образом, *тот компонент скорости, который направлен перпендикулярно к вихревым нитям и касается поверхности, имеет на обеих сторонах вихревой поверхности различные значения*. Внутри слоя вращающихся частиц нужно представлять себе соответственный компонент скорости возрастающих равномерно от того значения, которое имеет место на одной стороне поверхности, до значения на другой. В самом деле, если ξ во всей толщине слоя остается постоянным, и α обозначает правильную дробь, v' — значение v на одной стороне, v_1 — на другой, v_a — в самом слое на расстоянии $a\varepsilon$ от первой стороны, то легко видеть, что $v' - v_1 = 2\xi\varepsilon$, так как между обеими сторонами слой толщиной в ε и скорость вращения на нем ξ . На том же основании $v' - v_a = 2\xi\varepsilon\alpha = \alpha(v' - v_1)$, а в этом и заключается указанное положение. Вращающиеся частицы мы должны представлять себе движущимися и изменение в распределении их по поверхности зависящим от этого движения их; скорость каждой из них равна средней из скоростей, имеющих место в толще слоя; — эта скорость совпадает со средней арифметической скоростей, имеющих место на обеих сторонах слоя.

Такая вихревая поверхность образовалась бы, например, если бы две прежде разъединенные движущиеся жидкие массы пришли в соприкосновение. Тогда на поверхности соприкосновения скорости, перпендикулярные к ней, необходимо должны сравняться, скорости же, касательные к ней, были бы вообще в обеих массах жидкости различны. Таким образом, поверхность соприкосновения получила бы свойства вихревой поверхности.

Напротив, отдельные вихревые нити вообще нельзя представлять себе бесконечно тонкими, потому что иначе скорости на противоположных сторонах нити получали бы бесконечно большие и противоположные значения, вследствие чего собственная скорость нити сделалась бы неопределенной^[19]. Но чтобы все-таки вывести некоторые общие заключения о движении весьма тонких нитей произвольного сечения, мы воспользуемся принципом сохранения живой силы. Прежде чем перейти к отдельным примерам, составим уравнение живой силы K движущейся жидкой массы:

$$(6) \quad K = \frac{1}{2}h \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz.$$

Полагая в интеграле на основании уравнений (4)

$$\begin{aligned}u^2 &= u \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \right), \\v^2 &= v \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \right), \\w^2 &= w \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

и интегрируя по частям, обозначая затем через $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ и $\cos \vartheta$ косинусы углов, образуемых направленной внутрь нормалью к элементу $d\omega$ границы жидкой массы с осями координат и с результирующей скоростью q , на основании уравнений (2) и (1)₄ я получаю:

$$\begin{aligned}(6a) \quad K &= -\frac{h}{2} \int d\omega [Pq \cos \vartheta + L(v \cos \gamma - w \cos \beta) + \\&+ M(w \cos \alpha - u \cos \gamma) + N(u \cos \beta - v \cos \alpha)] - \\&- h \iiint (L\xi + M\eta + N\zeta) dx dy dz \quad [20].\end{aligned}$$

Чтобы получить выражение $\frac{\partial K}{\partial t}$, умножаем первое из уравнений (1) на u , второе на v , а третье на w и складываем их:

$$\begin{aligned}&h \left(u \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \\&= - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + h \left(u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \\&- \frac{h}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} + w \frac{\partial (q^2)}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения на $dx dy dz$, интегрируем по всему объему жидкой массы, и помня, что на основании (1)₄

$$\iiint \left(u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx dy dz = - \int \psi q \cos \vartheta d\omega,$$

где ψ внутри жидкой массы обозначает непрерывную и однозначную функцию, получаем,

$$(6b) \quad \frac{\partial K}{\partial t} = \int d\omega (p - hV + \frac{1}{2}hq^2)q \cos \vartheta.$$

Если жидкая масса всецело заключена в неподвижных стенках, то $q \cos \vartheta$ во всех точках поверхности должно равняться нулю, тогда и $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$, т. е. K — постоянно.

Если мы вообразим себе эту неподвижную стенку в бесконечном удалении от начала координат, а имеющиеся вихревые нити на конечном расстоянии, то потенциальные функции L , M , N , массы которых ξ , η , ζ каждая в сумме равна нулю, при бесконечном возрастании расстояния \mathfrak{R} будут убывать пропорционально \mathfrak{R}^{-2} , а скорости, их производные, пропорционально \mathfrak{R}^{-3} ; элемент поверхности $d\omega$ будет возрастать пропорционально \mathfrak{R}^2 , если он соответствует конусу с постоянным телесным углом при вершине в начал координат. Первый интеграл в выражении для

K (уравнение 6а), который распространяется на всю поверхность жидкой массы, будет убывать пропорционально \mathfrak{R}^{-3} , а следовательно, при \mathfrak{R} бесконечном обратится в нуль^[21]. Тогда величина K приведет к выражению

$$(6c) \quad K = -h \iiint (L\xi + M\eta + N\zeta) dx dy dz,$$

и эта величина при движении не изменяется.

5. Прямолинейные параллельные вихревые нити

Будем исследовать тот случай, когда существуют лишь прямолинейные вихревые нити, параллельные оси Z , и жидкость либо заполняет все беспредельное пространство, либо ограничена двумя перпендикулярными к вихревым нитям плоскостями, что сводится к тому же. В этом случае все движения происходят в плоскостях перпендикулярных к оси Z и во всех этих плоскостях будут совершенно одинаковы. Таким образом,

$$w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Уравнения (2) принимают вид

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad 2\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

а уравнение (3):

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Следовательно, вихревые нити сохраняют постоянную скорость вращения, а потому также и постоянное поперечное сечение.

Уравнения (4) принимают вид:

$$u = \frac{\partial N}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 2\zeta.$$

Я положил здесь $P = 0$ на основании замечания, сделанного мною в конце §3. Таким образом, уравнением линии течения^[22] будет $N = \text{const}$.

Величина N в этом случае представляет потенциальную функцию бесконечно длинных линий; она сама бесконечно велика, но ее производные конечны^[23]. Если a и b суть координаты вихревой нити, поперечное сечение которой равно $da db$, то

$$-v = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\zeta da db}{\pi} \cdot \frac{x-a}{r^2}, \quad u = \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\zeta da db}{\pi} \cdot \frac{y-b}{r^2}.$$

Отсюда следует, что результирующая скорость q перпендикулярна к перпендикуляру r , опущенному на вихревую нить, и что

$$q = \frac{\zeta da db}{\pi r}.$$

Положим, что в массе, распространившейся в бесконечность в направлениях x и y , мы имеем несколько вихревых нитей, координаты которых суть соответственно $x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$. Если мы обозначим произведение скорости вращения на поперечное сечение каждой нити через m_1, m_2 и т. д. и образуем суммы

$$U = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + \text{и т. д.}$$

$$V = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots,$$

то они будут равны нулю, потому что в сумме V часть, происходящая от действия второй вихревой нити на первую, уничтожается действием первой нити на вторую. Именно эти части будут

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad \text{и} \quad m_2 \cdot \frac{m_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r^2};$$

то же самое будет и во всех других частях обеих сумм. Но теперь U представляет скорость центра тяжести масс $m_1, m_2 \dots$ в направлении x , умноженную на сумму этих масс; то же значение имеет V относительно оси y . Обе скорости, следовательно, равны нулю, если только сумма масс не равна нулю, в каком случае вообще не имеет места центр тяжести. Итак, центр тяжести вихревых нитей при их взаимном передвижении остается неизменным, и так как это положение справедливо для любого распределения вихревых нитей, то его можно применить и к отдельным вихревым нитям с бесконечно малым поперечным сечением.

Отсюда вытекают такие следствия:

1) Если мы имеем отдельную прямолинейную вихревую нить с бесконечно малым поперечным сечением в жидкой массе, распространившейся в бесконечности во всех направлениях, перпендикулярных к нити, то движение жидких частиц, находящихся в конечном расстоянии от нити, зависит только от произведения $\zeta da db = m$ из угловой скорости на площадь поперечного сечения нити, а не от формы сечения. Частицы жидкой массы вращаются около нее с тангенциальной скоростью $\frac{m}{\pi r}$, где r представляет расстояние от центра тяжести вихревой нити. Таким образом, положение самого центра тяжести, скорость вращения, величина поперечного сечения, а следовательно, и величина m остаются неизменными, если даже форма бесконечно малого сечения и изменяется.

2) Если мы имеем две прямолинейные вихревые нити с бесконечно малым поперечным сечением в безграничной жидкой массе, то каждая из них относит другую в направлении, перпендикулярном к линии, их соединяющей. Расстояние их от этого не изменяется^[24]. Таким образом, обе нити будут вращаться около их общего центра тяжести, оставаясь на равном расстоянии друг от друга. Если скорость вращения в обеих вихревых нитях имеет то же направление, т. е. имеет одинаковые знаки, то центр тяжести должен лежать между ними.

Если же она в них направлена в противоположные стороны, т. е. имеет обратные знаки, то центр тяжести будет лежать на продолжении линии, их соединяющей. И если произведение из скорости вращения на поперечное сечение для обеих нитей то же по величине, но противоположно по знаку, — когда центр тяжести лежал бы в бесконечности, — то они обе будут передвигаться с одинаковой скоростью в том же направлении, перпендикулярном к линии, их соединяющей.

К последнему случаю можно свести и тот, когда вихревая нить с бесконечно малым поперечным сечением находится около параллельной ей бесконечной плоскости^[25]. Граничное условие для движения воды у этой плоскости, состоящее в том, чтобы движение происходило параллельно плоскости, выполняется, если вообразить себе по ту сторону плоскости вторую вихревую нить, представляющую зеркальное изображение первой. Отсюда следует, что находящаяся в жидкой массе вихревая нить движется (поступательно) параллельно плоскости в направлении,

в котором движутся жидкие частицы, находящейся между ней и плоскостью, и притом со скоростью равной четверти той скорости, которую имеет частица жидкости, лежащая в основании перпендикуляра, опущенного из вихревой нити на плоскость.

При прямолинейных вихревых нитях введение бесконечно малого поперечного сечения не приводит нас к недопустимым следствиям, потому что отдельная нить не имеет движущей силы относительно самой себя, а передвигается лишь под влиянием остальных имеющихся нитей. Иначе обстоит дело с искривленными нитями.

6. Кольцеобразные вихревые нити

Пусть в жидкой массе, простирающейся в бесконечность, существуют лишь круговые вихревые нити, плоскости которых перпендикулярны к оси z и центры лежат на этой оси, так что вокруг нее все симметрично. Преобразуем координаты, полагая

$$\begin{aligned}x &= \chi \cos \varepsilon, & a &= g \cos e, \\y &= \chi \sin \varepsilon, & b &= g \sin e, \\z &= z, & c &= c.\end{aligned}$$

Скорость вращения σ по предположению есть функция лишь χ и z или g и c , а ось вращения везде перпендикулярна к χ (или g) и оси z ^[26]. Отсюда прямоугольные компоненты вращения в точке с координатами g , e и c — суть

$$\xi = -\sigma \sin e, \quad \eta = \sigma \cos e, \quad \zeta = 0.$$

В уравнениях (5a) будем иметь:

$$\begin{aligned}r^2 &= (z - c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2\chi g \cos(\varepsilon - e), \\L &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \sin e}{r} g dg de dc, \\M &= -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \cos e}{r} g dg de dc, \\N &= 0.\end{aligned}$$

Умножая на $\cos \varepsilon$ и $\sin \varepsilon$ и складывая уравнения для L и M ^[27], получаем:

$$\begin{aligned}L \sin \varepsilon - M \cos \varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \cos(e - \varepsilon)}{r} g dg d(e - \varepsilon) dc, \\L \cos \varepsilon - M \sin \varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \sin(e - \varepsilon)}{r} g dg d(e - \varepsilon) dc.\end{aligned}$$

В обоих интегралах углы e и ε входят только в соединении $(e - \varepsilon)$, так что эта величина может быть рассматриваема как переменное под интегралом. Во втором интеграле части, в которых $(e - \varepsilon) = \delta$, сокращаются с теми, в которых $(e - \varepsilon) = 2\pi - \delta$; поэтому он оказывается нулем. Положим

$$(7) \quad \psi = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \cos e \cdot g dg de dc}{\sqrt{(z - c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2g\chi \cos e}},$$

тогда

$$\begin{aligned} M \cos \varepsilon - L \sin \varepsilon &= \psi, \\ M \sin \varepsilon + L \cos \varepsilon &= 0, \end{aligned}$$

или

$$(7a) \quad L = -\psi \sin \varepsilon, \quad M = \psi \cos \varepsilon.$$

Назовем через τ скорость в направлении радиуса χ и, обратив внимание на то, что в направлении окружности круга скорость должна быть равной нулю^[27a] вследствие симметричного положения вихревых колец относительно оси, получим:

$$u = \tau \cos \varepsilon, \quad v = \tau \sin \varepsilon$$

и из уравнений (4)

$$u = -\frac{\partial M}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial L}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Отсюда следует

$$\tau = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} + \frac{\psi}{\chi},$$

или

$$(7b) \quad \tau \chi = -\frac{\partial(\psi \chi)}{\partial z}, \quad \chi w = \frac{\partial(\psi \chi)}{\partial \chi}.$$

Таких образом, уравнение линий течения^[28] будет

$$\psi \chi = \text{const.}$$

Выполняя указанное в выражении ψ интегрирование прежде всего для вихревой нити с бесконечно малым поперечным разрезом, причем $\sigma dg dc = m_1$, и обозначая обусловленную этим часть ψ через ψ_{m_1} , имеем

$$\begin{aligned} -\psi_{m_1} &= \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\chi}} \left\{ \frac{2}{\varkappa} (F - E) - \varkappa F \right\}, \\ \varkappa^2 &= \frac{4g\chi}{(g + \chi)^2 + (z - c)^2}, \end{aligned}$$

где F и E обозначают полные эллиптические интегралы первого и второго рода для модуля \varkappa ^[29].

Положим для краткости

$$U = \frac{2}{\varkappa} (F - E) - \varkappa F,$$

где U — функция \varkappa ; тогда

$$-\tau \chi = \frac{m_1}{\pi} \sqrt{g\chi} \frac{dU}{d\varkappa} \cdot \varkappa \cdot \frac{z - c}{(g + \chi)^2 + (z - c)^2}.$$

Если в точке, определяемой координатами χ и z , находится вторая вихревая нить m , и мы назовем через τ скорость в направлении g , которую она сообщает вихревой нити m_1 , то мы получим величину τ_1 , если подставим в выражение для τ

$$\begin{array}{cccccc} \text{вместо} & \tau & \chi & g & z & c & m_1 \\ & \tau_1 & g & \chi & c & z & m. \end{array}$$

При этом \varkappa и U остаются неизменными и m место равенство:

$$(8) \quad m\tau\chi + m_1\tau_1g = 0.$$

Определим теперь величину w параллельной оси скорости, которая обусловлена вихревой нитью m_1 , с координатами g и c . Находим

$$-w\chi = \frac{1}{2} \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\chi}} U + \frac{m_1}{\pi} \sqrt{g\chi} \frac{dU}{d\varkappa} \cdot \frac{\varkappa}{2\chi} \cdot \frac{(z-c)^2 + g^2 + \chi^2}{(g+\chi^2) + (z-c)^2}.$$

Если мы обозначим через w_1 скорость, параллельную оси z и обуславливаемую вихревым кольцом m , координаты которого суть z и χ , в том месте, где помещается m_1 , то придется только произвести вышеуказанную уже замену соответствующих координат и масс. Тогда мы найдем, что^[30]:

$$(8a) \quad 2mw\chi^2 + 2m_1w_1g^2 - 2m\tau\chi z - 2m_1\tau_1gc = -\frac{2mm_1}{\pi} \sqrt{g\chi} U.$$

Подобные суммы, как в уравнениях (8) и (8a), можно составить для любого числа вихревых колец. Я обозначаю для n -го кольца произведение $\sigma dg dc$ через m_n , компоненты скорости, которую оно получает от остальных вихревых колец, через τ_n и w_n , причем я пока не буду рассматривать скорость, которую каждое кольцо может сообщить самому себе.

Я называю далее радиус кольца через ρ_n и его расстояние от неподвижной плоскости, перпендикулярной к оси, через λ_n . Хотя обе эти величины по направлению и совпадают с χ и z , но, принадлежа определенному вихревому кольцу, они представляют собой функции времени, а не независимые переменные, как χ и z . Пусть, наконец, величина ψ , насколько она обусловлена другими вихревыми кольцами, будет ψ_n . Тогда мы получим из уравнений (8) и (8a), составляя соответственные уравнения для каждой пары вихревых колец и складывая их^[31]:

$$\begin{aligned} \sum [m_n \rho_n \tau_n] &= 0, \\ \sum [2m_n w_n \rho_n^2 - 2m_n \tau_n \rho_n \lambda_n] &= \sum [m_n \rho_n \psi_n]. \end{aligned}$$

Пока в этих суммах имеется конечное число отдельных и бесконечно тонких вихревых колец, мы под w , τ и ψ можем подразумевать только те части этих величин, которые обусловлены присутствием других колец. Но если представить себе, что пространство непрерывно заполнено бесконечно большим числом таких колец, то ψ будет потенциальная функция непрерывной массы, а w и τ — производные этой потенциальной функции. Известно, что назначение такой функции, и ее производных, массы, заключенные в бесконечно малом объеме, окружающем соответственную точку, оказывают бесконечно малое влияние в сравнении с массами, лежащими на конечном расстоянии¹⁰. Если поэтому мы перейдем от сумм к интегралам, то можем под w , τ и ψ подразумевать полное значение этих величин в соответственной точке и положить

$$w = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \tau = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Величину m мы для этой цели заменим произведением $\sigma d\rho d\lambda$.

$$(9) \quad \iint \sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} d\rho d\lambda = 0,$$

¹⁰См. Гаусс в «Resultate des Magnetischen Vereins im Jahre 1839», стран. 7.

$$(9a) \quad 2 \iint \sigma \rho^2 \frac{\partial \lambda}{\partial t} d\rho d\lambda - 2 \iint \sigma \rho \lambda \frac{\partial \rho}{\partial t} d\rho d\lambda = \iint \sigma \rho \psi d\rho d\lambda.$$

Так как произведение $\sigma d\rho d\lambda$ по §2 относительно времени^[31a] постоянно, то уравнение (9) может быть интегрировано по t , и мы получаем

$$\frac{1}{2} \iint \sigma \rho^2 d\rho d\lambda = \text{const.}$$

Вообразим себе, что пространство разделено плоскостью, проходящей через ось z и пересекающей, следовательно, все имеющиеся вихревые кольца, будем рассматривать σ как плотность массивного слоя и обозначим через \mathfrak{M} всю массу, лежащую в этом слое, так что

$$\mathfrak{M} = \iint \sigma d\rho d\lambda$$

и через R^2 среднюю величину ρ^2 всех элементов массы, тогда

$$\iint \sigma \rho \cdot \rho d\rho d\lambda = \mathfrak{M} R^2;$$

так как этот интеграл и величина \mathfrak{M} сохраняют при движении постоянное значение, то и R остается неизменным.

Поэтому, если в неограниченной массе жидкости существует только одна кольцеобразная вихревая нить с бесконечно малым поперечным сечением, то радиус ее остается неизменным.

Величина живой силы в нашем случае, согласно уравнению (6c), выражается так

$$\begin{aligned} K &= -h \iiint (L\xi + M\eta) da db dc = \\ &= -h \iiint \psi \sigma \cdot \rho d\rho d\lambda d\varepsilon = \\ &= -2\pi h \iint \psi \sigma \cdot \rho d\rho d\lambda. \end{aligned}$$

Она также относительно времени постоянна^[32].

Замечая далее, что $\sigma d\rho d\lambda$ относительно времени постоянно, имеем:

$$\frac{d}{dt} \iint \sigma \rho^2 \lambda d\rho d\lambda = 2 \iint \sigma \rho \lambda \frac{d\rho}{dt} d\rho d\lambda + \iint \sigma \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} d\rho d\lambda;$$

обозначая затем через l значение λ для центра тяжести поперечного сечения вихревой нити, умножая на эту величину уравнение (9) и складывая это последнее с уравнением (9a), мы приводим уравнение (9a) к следующему виду:

$$(9b) \quad 2 \frac{d}{dt} \iint \sigma \rho^2 \lambda d\rho d\lambda + 6 \iint \sigma \rho (l - \lambda) \frac{d\rho}{dt} d\rho d\lambda = -\frac{K}{2\pi h}.$$

Если поперечное сечение вихревой нити бесконечно мало и ε — бесконечно малая величина того же порядка, как $l - \lambda$ и остальные линейные размеры поперечного сечения, а $\sigma d\rho d\lambda$ конечно,

то ψ , а также K будут количества бесконечно большие порядка $\log \varepsilon$. Таким образом, для весьма малых значений расстояния v от вихревого кольца мы имеем:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(g - \chi)^2 + (z - c)^2}, \\ \chi^2 &= 1 - \frac{v^2}{4g^2}, \\ \psi_{m_1} &= \frac{m_1}{\pi} \log \left(\frac{\sqrt{1 - \chi^2}}{4} \right) = \frac{m_1}{\pi} \log \frac{v}{8g} \quad [33]. \end{aligned}$$

В выражении для K ψ умножается еще на ρ или g . Если g конечно и v одного порядка с ε , то K будет порядка $\log \varepsilon$. Только если g есть бесконечно большая величина порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, то K будет величиной порядка $\frac{1}{\varepsilon} \log \varepsilon$. Тогда круг переходит в прямую. Напротив, величина $\frac{d\rho}{dt}$, равная $\frac{d\psi}{dz}$, будет порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, и потому второй интеграл будет конечен и при конечном ρ исчезает в сравнении с K ^[34]. В этом случае λ в первом интеграле можно заменить постоянным l , и мы получаем:

$$2 \frac{d(\mathfrak{M} R^2 l)}{dt} = - \frac{K}{2\pi h}$$

или

$$2\mathfrak{M} R^2 l = O - \frac{K}{2\pi h} t.$$

Так как \mathfrak{M} и R постоянны, то изменяться пропорционально времени может только l . Если \mathfrak{M} положительно, то движение жидких частиц на внешней стороне кольца направлено в сторону положительных z , на внутренней в сторону отрицательных z ; K , h и R по своей природе всегда положительны. Отсюда следует, что в кольцеобразной нити с весьма малым поперечным сечением, находящейся в беспредельной массе жидкости, центр тяжести поперечного сечения движется параллельно оси вихревой нити с приблизительно постоянной и весьма большой скоростью, направленной в ту же сторону, в какую жидкость течет сквозь кольцо.

Бесконечно тонкие вихревые нити с конечным радиусом получили бы бесконечно большую скорость передвижения. Если же радиус вихревого кольца есть бесконечно большая величина порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, то R^2 становится бесконечно большим в сравнении с K , и l будет постоянным. Вихревая нить, превратившаяся в прямую, становится стационарной, как мы это нашли уже раньше для прямолинейных вихревых нитей.

Мы можем теперь в общих чертах рассмотреть также, как две кольцеобразные вихревые нити, имеющие одну и ту же ось, будут влиять друг на друга, так как каждая, кроме собственного передвижения, следует еще движению жидких частиц, вызываемому другой нитью. Если они имеют одинаковое направление вращения, то обе передвигаются в одну и ту же сторону; движущаяся впереди нить будет расширяться и замедлять свое движение, следующая же за ней станет суживаться и передвигаться быстрее; если скорости передвижения не слишком различны, то второе кольцо наконец догонит первое и пройдет сквозь него. Затем то же явление повторяется с первым, так что кольца будут поочередно проходить одно через другое^[35] ¹¹.

¹¹ Этот эффект, отмеченный Гельмгольцем, называется чехардой. — Прим. ред.

Если вихревые нити имеют равные радиусы и равные, но противоположные скорости вращения, то они будут приближаться друг к другу под взаимным влиянием; наконец, когда они подойдут весьма близко друг к другу, то взаимное сближение их будет происходить все слабее, расширение же, напротив, будет происходить с возрастающей скоростью. Если обе вихревые нити вполне симметричны, то для частиц, лежащих в срединной плоскости, скорость параллельная оси равна нулю. Поэтому, не возмущая движения, мы можем вообразить здесь твердую стенку, и таким образом получаем случай одного вихревого кольца, направляющегося к твердой стенке.

Я замечу еще, что движения круглых вихревых колец легко наблюдать в действительности, быстро продвинув на небольшое расстояние параллельно поверхности воды на половину погруженный в нее кружок или имеющий приблизительно форму полукруга кончик ложки и затем быстро вынимая их; тогда в жидкости остаются половины вихревых колец, ось которых лежит на свободной поверхности. Таким образом, свободная поверхность образует плоскость, проходящую через ось и ограничивающую массу воды, что не вызывает никакого существенного изменения в движении. Вихревые кольца передвигаются поступательно, расширяются, приближаясь к стенке; далее, они расширяются или суживаются под влиянием других вихревых колец совершенно так, как мы это вывели из теории.

Примечания и объяснения к тексту

[1] Понятие потенциала скоростей, как это указано в тексте, встречается уже у Лагранжа; новое название вводится здесь Гельмгольцем по аналогии с введенным Гауссом названием «потенциала»; под текстом цитируется второе издание *Mécanique analytique* Lagrang'a, первое вышло в 1788 г. Название указанной работы Эйлера — *Principes généraux du mouvement des fluides*.

[2] Со времени появления этого трактата по вопросу о влиянии трения на движение жидкостей сделано довольно большое число подробных опытных и теоретических исследований, именно Гельмгольцем и Пиотровским (*Vien. Sitzungsber.* 40. 1860); Стефаном (*Vien. Sitzungsber.* 46. 1862), Мейером (*Crelle's Journal*, Bd. 59, 73, 75, *Poggendorff's Annalen*, 113, 143), Максвеллом (*Philosoph. Transact.*, 1866); Буссинеском (*Lionville I.* 1868) и другими. Заметим еще, что общие уравнения движения вязкой (т. е. подверженной трению) жидкости были даны уже Навье (*Mém. d'Acad. de Paris*, 6, 1823), Пуассоном (*Journ. d'Ecol. Polyt.*, Cahier 20. 1831) и Стоксом (*Combr. Phil. Trans.* VIII. 1844), и что последний уже применил эти уравнения к движению сферического маятника в воздухе (*Comb. Frans.* IX. 1851).

[3] Положенные здесь в основание уравнения, вывод которых можно найти во всех учебниках механики, суть так называемые уравнения Эйлера. Они определяют скорость и давление жидкости, как функции места и времени. Вторая форма, которую можно дать уравнениям гидродинамики, служит для выражения координат определенной частицы жидкости, как функции ее начального положения и времени. Эта вторая форма, которую называют формой уравнений Лагранжа, также принадлежит Эйлеру (*Nov. Comment. Acad. Petropol.* 14, 1769; по ошибке эту работу всегда относят к 1759 году вследствие опечатки на заглавии соответствующего тома. Том 14 принадлежит 1769 году и появился 1770 г.).

Теорию вихревых движений можно вывести и из уравнений Лагранжа; это показал Ганкель, разрешив задачу на соискание премии, поставленную философским факультетом Геттингенского университета (*Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten*, Göttingen 1861).

[4] Цитируемые здесь работы Гаусса и Грина имеются в издании *Ostwald's Klassiker* (№№ 2 и 61).

Теорема Грина, на которую здесь делается ссылка, находится на стр. 24 (resp. примеч. стр. 121) в №61 Ostwald's Klass. Гельмгольц здесь первый обратил внимание на то обстоятельство, что потенциал скоростей ϕ в многосвязных пространствах может сделаться многозначным, и что для таких многозначных функций теорема Грина не имеет места (ср. стр. 21 и 22 текста, также примеч. 17). Как расширить эту теорему, если речь идет о многозначных функциях, было показано Томсоном (лорд Кельвин) (On vortex. motion. Edinb. Trans. 25. 1869).

[5] Важный вопрос о разложении движения жидкости, рассматриваемый здесь впервые с самой общей точки зрения, вызвал полемику между Гельмгольцем и Бертраном (Compt. rend. Bd. 66, 67, 1868).

В результате этого спора Бертран должен был согласиться, что формулы Гельмгольца столь же общи, как и данные им формулы, исходную точку которых составляет разложение движения жидкости на два основных движения: перенос и расширение по трем направлениям, взаимно перпендикулярным.

[6] О теореме Грина ср. № 61 Ostwald's Klassiker, стр. 121 (примеч. 9). Если в приведенной там формуле положить $U = V = \phi$ и принять во внимание, что $\delta\phi = 0$, то получается уравнение, приводимое в тексте. Относительно ограничения теоремы см. примеч. 4). Цитата в примечании содержит в оригинале ошибку, там стоит: Crelle's journal, том LIV, стр. 108, вместо XLIV, стр. 360. — В томе LIV содержится упомянутая на стр. 474 текста работа Римана.

Что у твердой стенки, ограничивающей жидкость, нормальная слагающая скорости $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ обращается в нуль, следует из того, что поверхность жидкости, свободна ли она или несвободна, состоит всегда из тех же частиц. Последнее есть следствие непрерывности жидкости.

[7] Этим определяется понятие «вихревого движения», как такого движения жидкости, при котором определяемые уравнениями (2) на стр. 477 слагающие скорости вращения не обращаются в нуль. Если это имеет место, то потенциал скоростей не существует. Важность этого нового понятия особенно видна из следующих открытых Гельмгольцем теорем.

[8] Для пояснения заметим: в уравнениях Эйлера величины, определяющие движение жидкости, выражаются как функции места и времени. Поэтому $\frac{\partial\psi}{\partial t}dt$ обозначает изменение, претерпеваемое функцией ψ за время dt в определенном месте жидкости. Эта величина отнюдь не представляет собой изменения, которое испытывает ψ за время dt для определенной частицы жидкости, так как частица в продолжение времени dt не остается на одном и том же месте, но координаты ее изменяются на $u dt$, $v dt$ и $w dt$. Если для какой-нибудь частицы жидкости в начале рассматриваемого элемента времени ψ была некоторой определенной функцией от x, y, z, t , то в конце dt ψ для нее есть та же функция от $x + u dt, y + v dt, z + w dt, t + dt$. Поэтому изменение ψ в этом случае будет:

$$u dt \frac{\partial\psi}{\partial x} + v dt \frac{\partial\psi}{\partial y} + w dt \frac{\partial\psi}{\partial z} + dt \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

и это выражение в отличие от $\frac{\partial\psi}{\partial t}dt$ обозначается через $\frac{d\psi}{dt}dt$.

[9] Относительно выкладок, приводящих к уравнениям (3) и (3a), заметим следующее: дифференцируя первое уравнение (1) по y , второе по x и вычитая затем второе из первого, мы получаем, пользуясь условием (1a) и последующим уравнением (2):

$$(a) \quad 0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + w \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Сумма первых четырех членов правой части равна $\frac{d2\zeta}{dt}$. Сумма следующих членов, если согласно четвертому уравнению (1) положить $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$, представится в виде:

$$(b) \quad -\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Прибавляя и вычитая из этой суммы по $\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$, можем сумму (b) записать так:

$$(b') \quad -\frac{\partial w}{\partial x} 2\xi - \frac{\partial w}{\partial y} 2\eta - \frac{\partial w}{\partial z} 2\zeta.$$

Подставляя это выражение в (a), получаем последнее уравнение (3). Чтобы получить последнее уравнение (3a), нужно к сумме (b) прибавить

$$+\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

[10] В оригинале скорость вращения обозначена не через σ , а через q . Изменение сделано для сохранения единства в обозначении, так как дальше в оригинале скорость вращения всегда обозначается через σ , между тем как q есть результирующая скорость. В собраниях сочинений q иногда заменено σ .

[11] Для пояснения доказанной здесь важной теоремы могло бы служить следующее замечание: Гельмгольц рассматривает две жидкие частицы, из которых вторая для времени t лежит на оси вращения первой, и именно на расстоянии $\varepsilon\sigma$ от нее. Если координаты первой частицы суть x, y и z , то координаты второй — $x + \varepsilon\xi, y + \varepsilon\eta, z + \varepsilon\zeta$; и если слагающие скорости первой u, v, w , а второй u_1, v_1, w_1 , то вследствие непрерывности жидкости u_1, v_1, w_1 суть те же функции от $x + \varepsilon\xi, y + \varepsilon\eta, z + \varepsilon\zeta$ как u, v, w от x, y, z . Разлагая по строке Тейлора, мы получаем для u_1, v_1, w_1 выражения, данные тремя уравнениями на стр. 480. По истечении времени dt обе частицы изменили свое положение в жидкости; координаты первой стали теперь $x + udt, y + vdt, z + wdt$, а второй $x + \varepsilon\xi + u_1dt, y + \varepsilon\eta + v_1dt, z + \varepsilon\zeta + w_1dt$. Если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ суть косинусы углов направления прямой, соединяющей обе частицы для времени $t + dt$, то

$$(a) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \varepsilon\xi + (u_1 - u)dt : \varepsilon\eta + (v_1 - v)dt : \varepsilon\zeta + (w_1 - w)dt.$$

Вставляя значение $u_1 - u$ и т. д. и пользуясь уравнениями (3) на стр. 479, эти пропорции можно написать также в следующем виде:

$$(b) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \varepsilon\xi + \varepsilon \frac{d\xi}{dt} dt : \varepsilon\eta + \varepsilon \frac{d\eta}{dt} dt : \varepsilon\zeta + \varepsilon \frac{d\zeta}{dt} dt.$$

С другой стороны, во время dt изменилось и направление оси вращения первой частицы, так как компоненты скорости вращения, имевшие для времени t значения ξ, η, ζ , для времени $t + dt$ обратились в $\xi + \frac{d\xi}{dt} dt, \eta + \frac{d\eta}{dt} dt, \zeta + \frac{d\zeta}{dt} dt$. Если поэтому косинусы углов направления оси вращения для времени $t + dt$ суть α', β', γ' , то:

$$(c) \quad \alpha' : \beta' : \gamma' = \xi + \frac{d\xi}{dt} dt : \eta + \frac{d\eta}{dt} dt : \zeta + \frac{d\zeta}{dt} dt.$$

Из уравнений (b) и (c) следует:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha' : \beta' : \gamma',$$

т. е. линия, соединяющая рассматриваемые частицы, совпадавшая для времени t с направлением оси вращения первой из них, и для времени $t + dt$ совпадает с направлением уже изменившейся оси вращения; а если это справедливо в момент $t + dt$, то, повторяя то же рассуждение, мы убедимся, что оно должно быть справедливо и по истечении любого промежутка времени.

[12] Что объем части жидкости, состоящей всегда из одних и тех же частиц, постоянен, следует из несжимаемости.

Заметим здесь, что выведенные в §2 положения относительно постоянства вихревого движения не имеют места для жидкостей, подверженных трению.

[13] Прием замены интеграции по двум координатам интеграцией по поверхности S употреблен впервые Гауссом (сравн. №19 Ostwald's Klassiker, стр. 53). Там показано также, как провести строгое доказательство для любой формы поверхности S .

Угол ϑ (см. стр. 481) есть угол между осью вращения и нормалью.

[14] Здесь применяется так называемое уравнение Пуассона, по которому сумма вторых частных производных потенциала для точек притягивающей массы равна плотности, умноженной на -4π (ср. №2 Ostwald's Klassiker стр. 17).

[15] В оригинале ошибочно напечатано: «и назовем элемент поверхности S опять $d\omega$ ». Уравнение (2a) стр. 484 есть то же, что приведено уже на стр. 481, только с измененными обозначениями.

[16] Приведенный закон о действии элемента тока на магнитную стрелку есть закон Био — Савара.

Заметим еще, что для получения выражений для Δu , Δv , Δw (стр. 484) в уравнениях (4) P следует положить равным нулю.

[17] Если ds — какой-нибудь элемент дуги, то $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ есть компонент скорости по направлению ds . Если ds лежит в направлении течения, то $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ представляет всю скорость и имеет положительное значение. Если же $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ положительно, то ϕ возрастает с возрастанием s , т. е. в направлении течения ϕ постоянно увеличивается, и если течение замкнуто в себе, то после прохождения течения ϕ в исходной точке должно получить иное значение, чем прежде. Поэтому ϕ бесконечно многозначно, подобно циклометрическим функциям.

[18] Так как вращающиеся частицы имеются только на рассматриваемой поверхности, то и все вихревые линии лежат на поверхности, и потому ось вращения каждой частицы должна касаться поверхности; что вихревые линии нигде не могут выступить с поверхности, вытекает из того, что §2 вихревая нить никогда не может кончаться внутри жидкости. Относительно примененного здесь характерного свойства потенциала поверхности сравн. №2 Ostwald's Klassiker, §§12–18.

[19] Это следует из того, что потенциал притягивающей линии на бесконечно малом расстоянии t от линии становится бесконечным, как $2\rho \log \left(\frac{1}{t}\right)$, где ρ — плотность и $\lim \left(t \frac{dV}{dt}\right) = -2\rho$ для $t = 0$.

[20] Первая часть выражения $\frac{2K}{h}$, а именно:

$$a) \quad \iiint \left(u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

по интеграции по частям и замене $dy dz = -d\omega \cos \alpha$ и т. д. (отрицательный знак входит потому, что α есть угол наклона нормали, направленной *внутрь*, с осью x) переходить в:

$$- \iint P(u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) d\omega - \\ - \iiint P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Последний интеграл согласно четвертому уравнению (1) дает 0; далее

$$u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma = q \cos \vartheta.$$

Интеграл $a)$ принимает вид:

$$b) \quad - \iint P q \cos \vartheta d\omega.$$

Совершенно так же получается приводимая дальше общая формула, в которой только вместо P стоит ψ . Следующая часть $\frac{2K}{h}$, а именно:

$$\iiint \left(v \frac{\partial L}{\partial z} - w \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy dz$$

дает таким же образом:

$$- \iint L(v \cos \gamma + w \cos \beta) d\omega - \iiint L \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy dz,$$

$$\text{и } \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 2\xi.$$

В уравнении (6b) в оригинале по ошибке стоит U (вместо V). Относительно обращения в нуль нормальной слагающей скорости $q \cos \vartheta$ на поверхности (сравн. примеч. 6).

[21] Что массы, соответствующие потенциальным функциям L , M , N , в общем дают нуль, выясняется так: так как имеются только отдельные вихревые нити, которые не простираются до стенок, то они должны, замыкаясь, образовать бесконечно тонкие кольца. Если κ есть поперечное сечение такого кольца, σ — скорость вращения, ds — элемент дуги средней линии, α — угол, образуемый ds с осью x , то, помня, что ось вращения есть касательная к средней линии, мы имеем:

$$\xi_a = \sigma \cos \alpha, \quad da db dc = \kappa ds.$$

Поэтому вся масса, потенциал которой есть L , выразится так:

$$\kappa \sigma \int \cos \alpha ds.$$

Но последний интеграл есть нуль, так как он должен быть распространен на замкнутую кривую. То же самое справедливо для всех вихревых колец. Впрочем, поверхностный интеграл в выражении (6a) обратился бы в нуль и в том случае, если бы массы, о которых идет речь, и не были нулями. Это следует из свойств потенциальной функции и ее производных в бесконечно большом расстоянии от действующих масс.

[22] Линии тока или линии течения суть те кривые, касательный которых повсюду имеют то же направление, как результирующая скорость. Дифференциальное уравнение этих линий в данном случае, где дело идет о движении по плоскости, будет:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy = 0,$$

и интеграл этого уравнения есть $N = \text{const.}$

[23] Относительно потенциальной функции бесконечно длинной прямой заметим следующее. Потенциал линии, параллельной оси Z и простирающейся от $z = -h$ до $z = +h$, в том случае если плотность = 1 и притягиваемая точка лежит в плоскости xy , равен:

$$V = \int_{+h}^{-h} \frac{dc}{\sqrt{c^2 + \rho^2}} = \log \left(\frac{h + \sqrt{h^2 + \rho^2}}{-h + \sqrt{h^2 + \rho^2}} \right),$$

где

$$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Этому выражению для V можно придать следующий вид:

$$V = 2 \log h + 2 \log \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{h^2}} \right) - 2 \log \rho.$$

Для $h = \infty$ постоянный член $2 \log h$ будет равен ∞ , между тем как $\frac{dV}{dx}$ при $h = \infty$ остается конечным, а именно $= -\frac{2(x-a)}{\rho^2}$.

Выражение для V , которое получается, если, опуская постоянное $2 \log h$, положим $h = \infty$, носит название логарифмического потенциала.

[24] Именно если r есть длина соединяющего отрезка, то

$$r \frac{\partial r}{\partial t} = (x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)(v_2 - v_1).$$

Внося вместо u_1, v_1, u_2, v_2 их значения, определяемые формулами стр. 480, в правой части имеем нуль; следовательно, r постоянно.

[25] Пусть $y = 0$ есть уравнение стенки, координаты вихревой нити a, b и произведение поперечного сечения на скорость вращения есть m . Зеркальное изображение вихревой нити имеет координаты $a, -b$ и указанное произведение для него имеет величину $-m$. Компоненты скорости в любой точке жидкости x, y , которые обуславливаются данной вихревой нитью, суть:

$$u = \frac{m}{\pi} \frac{y-b}{r^2}, \quad v = -\frac{m}{\pi} \frac{x-a}{r^2}, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Часть скорости x, y , обуславливаемая зеркальным изображением, имеет компоненты

$$u_1 = -\frac{m}{\pi} \frac{y-b}{r_1^2}, \quad v_1 = +\frac{m}{\pi} \frac{x-a}{r_1^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

У стенки $r = r_1$, поэтому $v + v_1 = 0$, т. е. имеет место движение только параллельное стенке. Для основания перпендикуляра $x = a$, $y = 0$, поэтому $u + u_1 = \frac{-2m}{\pi b}$. Скорость, вызываемая в самой вихревой нити ее зеркальным изображением, так как здесь $x = a$, $y = b$, $r_1 = 2b$, будет:

$$u_1 = -\frac{m}{\pi} \frac{2b}{4b^2} = -\frac{m}{2\pi b};$$

итак, эта скорость равна $\frac{1}{4}$ скорости у основания перпендикуляра.

Задачами о движении прямолинейных вихревых нитей занимались кроме Белтрами в его вышеупомянутом трактате в особенности еще Гринхилл (Quart. j. XV. 1877), Коатес (Quart. j. XV, 1878) и Грёбли (vierteljahrsheft der naturforschenden Ges. in Zürich XXII, 1877).

[26] Ось вращения есть касательная вихревой линии, поэтому косинусы ее направления суть $-\sin \varepsilon$, $\cos \varepsilon$, 0 , а потому компоненты скорости вращения σ имеют величины, данные в тексте.

[27] Формула Z. Строки этой страницы в оригинале гласят:

$$L \sin \varepsilon - M \cos \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \cos(\varepsilon - e)}{r} g dg d(\varepsilon - e) dc.$$

Так же и в формуле (7) на стр. 491 и в следующих формулах, везде вместо $e - \varepsilon$ стоит $\varepsilon - e$. При этом, по-видимому, выпущено из виду, что если на место e переменной интеграции вводится ε , то пределы делаются равными 0 и -2π . Поэтому, если далее в оригинале положено:

$$M \cos \varepsilon - L \sin \varepsilon = \psi = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \cos e \cdot g dg de dc}{\sqrt{(z - c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2g\chi \cos e}},$$

то здесь интеграл по e распространится от 0 , как нижнего предела, до -2π , как верхнего, между тем, как из дальнейшего видно, что за пределы без оговорок принято 0 и $+2\pi$. По этой причине изменение формул оригинала было необходимо. Чтобы вводить по возможности меньше изменений в текст, $\varepsilon - e$ заменено через $e - \varepsilon$, и затем функция ψ определена уравнением:

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\sigma \cos e \cdot g dg de dc}{\sqrt{(z - c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2g\chi \cos e}},$$

где пределы e суть 0 и $+2\pi$. Таким образом все следующие формулы на стр. 492 могли быть удержаны без изменения.

[27a] Для пояснения заметим следующее. Так как для рассматриваемого здесь случая $P = 0$, $N = 0$, то по уравнениям (4) на стр. 482 имеем:

$$u = -\frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \varepsilon, \quad v = -\frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \sin \varepsilon,$$

поэтому:

$$-u \sin \varepsilon + v \cos \varepsilon = 0, \quad u \cos \varepsilon + v \sin \varepsilon = -\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

т. е. слагающая скорости перпендикулярная к радиусу, обращается в нуль, а слагающая, параллельная радиусу (т. е. τ), имеет значение $-\frac{\partial \psi}{\partial z}$. Значение w мы получим, вставляя в последнее

уравнение (4) на стр. 482 выражения для M и L и заменяя дифференцирования по x и y дифференцированием по χ и ε , причем надо помнить, что ψ не зависит от ε .

[28] Для линий течения имеют место следующие дифференциальные уравнения (сравн. прим. 22):

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx}{\tau \cos \varepsilon} = \frac{dy}{\tau \sin \varepsilon} = \frac{dz}{w}.$$

Так как:

$$\sin \varepsilon dx - \cos \varepsilon dy = -d\varepsilon,$$

то по первому из этих уравнений $d\varepsilon = 0$, так что для линии тока имеем $dx = d\chi \cos \varepsilon$, $dy = d\chi \sin \varepsilon$.

Поэтому остается еще уравнение:

$$\frac{d\chi}{\tau} = \frac{dz}{w},$$

интеграция которого дает $\psi\chi = \text{const}$. Изображение линий тока, вызванных одним вихревым кольцом, можно найти у Максвелла в его *Electricity and Magnetism*, P. II, табл. XVIII.

[29] ψ_{m_1} есть значение интеграла в уравнении (7) к стр. 491 если отвлечься от интеграции по g и c . Чтобы этот интеграл привести к нормальному виду эллиптического интеграла, стоит только заменить интеграл с пределами 0 и 2π удвоенным интегралом с пределами 0 и π , совершить подстановку $e = \pi - 2\vartheta$ и выразить $\cos \vartheta$ через $\sin \vartheta$; тогда:

$$-\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\chi}} \varkappa \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(2 \sin^2 \vartheta - 1) d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \vartheta}},$$

где \varkappa имеет указанное в тексте значение, а отсюда вытекает приводимое в тексте значение ψ_{m_1} . Зависимость ψ_{m_1} от z обуславливается лишь тем, что эта переменная содержится в \varkappa .

Нужно заметить, что в оригинале уравнения для ψ_{m_1} , $\tau\chi$, $w\chi$ на левой стороне имеют знак + вместо знака -, также и правая часть уравнения (8a). Это изменение есть следствие изменения, выясненного в примечании (27).

[30] В оригинале у третьего и четвертого члена левой части уравнения (8a) недостает множителя 2. Также нужно было прибавить множитель 2 и к соответствующим членам следующих уравнений на этой и следующих страницах. Впрочем, прибавлением этого множителя не изменяется полученный результат, так как там рассматриваемый член исчезает в сравнении с другими.

[31] Переход от уравнений (8) и (8a) к уравнениям страницы 493 может вызвать у начинающих затруднения в виду того, что употребленный здесь способ обозначений совершенно отличен от предыдущего; поэтому мы дадим следующие разъяснения. Рассмотрим, из каких частей слагаются величины, обозначенные в тексте через τ_n , w_n , ψ_n . Для этого обозначим слагающие скорости, которую получает первое кольцо от действия на него второго, через τ_{12} , w_{12} , а отличные от них τ_{21} , w_{21} пусть будут слагающие скорости, которую получает второе кольцо от первого. Аналогично τ_{mn} , w_{mn} будут слагающие скорости, получаемой m -ым кольцом от действия n -ого.

Таким образом, если имеется i колец:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau_{12} + \tau_{13} + \dots + \tau_{1i}, \\ \tau_2 &= \tau_{21} + \tau_{23} + \dots + \tau_{2i}, \\ \tau_3 &= \tau_{31} + \tau_{32} + \dots + \tau_{3i}, \\ &\dots\dots\dots \\ w_1 &= w_{12} + w_{13} + \dots + w_{1i}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Применяя уравнение (8) к первым двум кольцам, получаем:

$$m_1\tau_{12}\rho_1 + m_2\tau_{21}\rho_2 = 0.$$

Образуем аналогичные уравнения всех комбинаций колец попарно и, складывая все полученные таким образом уравнения, находим:

$$\begin{aligned}m_1\rho_1(\tau_{12} + \tau_{13} + \dots + \tau_{1i}) + m_2\rho_2(\tau_{21} + \tau_{23} + \dots + \tau_{2i}) + \\ + \dots + m_i\rho_i(\tau_{i1} + \tau_{i2} + \dots + \tau_{ii-1}) = 0\end{aligned}$$

или

$$m_1\rho_1\tau_1 + m_2\rho_2\tau_2 + \dots + m_i\rho_i\tau_i,$$

т. е.

$$\sum m_n\rho_n\tau_n = 0.$$

Совершенно таким же образом получается из (8а) второе уравнение страницы 493. Что касается первой части этого уравнения, то заметим следующее. Применяя уравнение (8а) сперва для первых двух колец, мы получаем справа:

$$\begin{aligned}&-2\frac{m_1m_2}{\pi}\sqrt{\rho_1\rho_2}U_{12} = \\ &= -m_1\rho_1\frac{m_2}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}U_{12} - m_2\rho_2\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}U_{12} = \\ &= +m_1\rho_1\psi_{12} + m_2\rho_2\psi_{21};\end{aligned}$$

где ψ_{12} есть часть силовой функции ψ , представляющая действие второго кольца на первое, а ψ_{21} — часть, происходящая от действия первого кольца на второе. U_{12} есть определенная на стр. 492 функция U , в которой χ, z, g, c заменены соответственно через $\rho_1, \lambda_1, \rho_2, \lambda_2$. ψ_{12} есть функция, обозначенная на стр. 492 через ψ_{m_1} , в которой m_1, g, χ заменены через m_2, ρ_2, ρ_1 . Применяя уравнение (8а) последовательно для всех комбинаций колец попарно и суммируя все полученные таким образом уравнения, мы получаем для первой части результирующего уравнения следующее выражение:

$$m_1\rho_1(\psi_{12} + \psi_{13} + \dots + \psi_{1i}) + m_2\rho_2(\psi_{21} + \psi_{23} + \dots + \psi_{2i}) + \dots$$

функцию $\psi_{12} + \psi_{13} + \dots + \psi_{1i}$ Гельмгольц обозначает через ψ_1 ; таким же образом множитель при $m_2\rho_2$ он обозначает через ψ_2 и т. д. Тогда написанное выражение принимает вид:

$$m_1\rho_1\psi_1 + m_2\rho_2\psi_2 + \dots = \sum (m_n\rho_n\psi_n).$$

Что касается перехода от конечного числа колец к бесконечно большому числу, то нужно заметить, что сказанное в тексте относительно этого перехода относится к величинам ψ_n, τ_n, w_n , которые до сих пор представляли собою конечные суммы, теперь же переходят в пространственные интегралы (а именно ψ переходит в интеграл (7) стр. 491). Обозначенное знаком \sum суммирование дает трехкратное интегрирование; таким образом соотношения между суммами переходят в соотношения между шестикратными интегралами. Что переход от обозначенного через \sum суммирования к интегрированию без всяких оговорок возможен, следует из того, что потенциал пространственных масс и его первые производные конечны и непрерывны во всем пространстве.

Указанная в сноске стр. 493 работа, как много раз уже указывалось, напечатана в №2 изд. Ostwald's Klassik. Что (стр. 493) только после перехода от суммирования к интегрированию положено $w = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \tau = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, объясняется следующим обстоятельством: выведенные до этого перехода формулы всегда относятся лишь к действию, которое испытывает бесконечно тонкое кольцо со стороны других, находящихся от него на конечном расстоянии, между тем после перехода необходимо обратить внимание и на действие бесконечно близких колец, так что теперь только делается известной полная скорость в данном месте.

[31a] Это теорема, указанная раньше. $d\rho d\lambda$ можно рассматривать, как поперечное сечение вихревого кольца.

[32] Различно с обозначением на стр. 488 в интеграле K переменными интегрирования введены a, b, c . Нужно представлять себе, конечно, что в L и M , которые также представляются тройными интегралами, вместо a, b, c введены другие переменные.

Далее, не согласуя с обозначением в начале §6, цилиндрические координаты, в которых выражаются a, b, c , названы через $\rho, \varepsilon, \lambda$. Поэтому нужно положить $\xi = -\sigma \sin \varepsilon, \eta = \sigma \cos \varepsilon$, между тем как формулы $L = -\psi \sin \varepsilon, M = \psi \cos \varepsilon$ остаются без изменения. Что K постоянно относительно времени, доказано на стр. 488.

[33] Здесь мимоходом автор опять пользуется буквами g, c вместо ρ, λ . Указанное здесь значение для \varkappa вытекает из данного на стр. 495, если пренебречь высшими степенями бесконечно малых величин $z - c, \chi - g$.

Что касается формулы для ψ_{m_1} , то она основывается на том, что если \varkappa приближается к значению 1, то полный эллиптический интеграл первого рода, обозначаемый Гельмгольцем через F , становится бесконечным, как $\log \left(\frac{4}{\sqrt{1-\varkappa^2}} \right)$ (сравн. Legendre, «Traité des fonctions elliptiques» I, chap. XIX, а также и «Durège», Theorie der elliptischen Functionen, § 50). Полный же эллиптический интеграл второго рода E при $\varkappa = 1$ равняется единице.

Пренебрегая конечной величиной 2 в сравнении с бесконечно большой величиной F и принимая во внимание, что $\sqrt{\frac{g}{\chi}}$ с точностью до бесконечно малой величины $= 1$, приводим формулу на стр. 492 для ψ_{m_1} к виду, данному в тексте.

Приближенное значение F , которым приходится пользоваться здесь, можно вывести следующим образом. Положим $1 - \varkappa^2 = \varkappa_1^2$ и разложим интеграл F на сумму двух интегралов; получим:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \psi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2 \phi + \varkappa_1^2 \sin^2 \phi}} + \int_{\frac{\pi}{2} - \psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2 \phi + \varkappa_1^2 \sin^2 \phi}}.$$

Выбирая для ψ_1 такое значение, чтобы $\sin \psi_1$ было бесконечно малым, но бесконечно большим в сравнении с \varkappa_1 , мы можем в первой части разложить подынтегральную функцию по степе-

ням \varkappa_1 . Пренебрегая уже самой низшей степенью от \varkappa_1^2 , мы получаем следующее приближенное значение первой части F :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\cos \phi} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi_1}{2} \right) = \log \left(\frac{2}{\psi_1} \right),$$

так как ψ_1 бесконечно мало.

Вводя далее во второй части F вместо ϕ новое переменное $\frac{\pi}{2} - \psi$, можно, по малости ψ , вместо $\sin \psi$ и $\cos \psi$, положить ψ и 1, и тогда вторая часть F приближенно будет равна:

$$\begin{aligned} \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 + \varkappa_1^2}} &= \log \frac{\psi_1 + \sqrt{\psi_1^2 + \varkappa_1^2}}{\varkappa_1} = \\ &= \log \psi_1 + \log \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varkappa_1^2}{\psi_1^2}} \right) - \log \varkappa_1. \end{aligned}$$

Складывая обе части F и пренебрегая $\left(\frac{\varkappa_1}{\psi_1} \right)^2$, которая бесконечно мала в сравнении с 1, имеем $F = \log \left(\frac{4}{\varkappa_1} \right)$.

[34] Последние строчки представляют собой лишь побочное замечание для последующего. Таким образом, при определении порядка величины $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ g рассматривается, как величина конечная. Этот порядок величины $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ получается следующим образом: так как $U = \log \left(\frac{4}{\sqrt{1 - \varkappa^2}} \right)$, то

$$\varkappa \frac{\partial U}{\partial \varkappa} = \frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2} = \frac{\varkappa^2 \cdot 4g^2}{v^2}.$$

Таким образом, выражение для $\tau\chi$ (стр. 492) содержит в знаменателе квадрат бесконечно малой v , в числителе же первую степень от $z - c$, которое одного порядка с v .

Направление движения жидких частиц по обе стороны кольца определяется проще всего из следующих соображений. В том месте кольца, где $e = 90^\circ$, $\xi = -\sigma$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Находящаяся вблизи частица (сравн. стр. 477) вследствие вращения имеет следующие слагающие скорости: $0, -(z - \mathfrak{z})\sigma, +(y - \mathfrak{y})\sigma$. Для частицы, лежащей в плоскости кольца вне его $z = \mathfrak{z}, y > \mathfrak{y}$; следовательно, движение такой частицы направлено к положительной оси z ; между тем, для точек внутри кольца ($z = \mathfrak{z}, y < \mathfrak{y}$) и направление движения будет противоположным.

Можно тот же результат вывести и из формул для w , полагая в них $z = c$.

[35] Указанный здесь результат можно обосновать следующим образом. Движение отдельного вихревого кольца, как оно выведено в предшествующем изложении, изменяется благодаря присутствию второго кольца, и соответственное изменение можно вычислить. Пусть обозначения $m, \rho, z, \tau = \frac{\partial \rho}{\partial t}, w = \frac{\partial z}{\partial t}$ относятся к одному кольцу, $m_1, \rho_1, z_1, \tau_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, w_1 = \frac{\partial z_1}{\partial t}$ — к другому, пусть m и m_1 положительны и $z > z_1$, тогда каждое кольцо без наличия другого двигалось бы в сторону отрицательных z , и кольцо m_1 двигалось бы впереди. Но согласно уравнению (8) стр. 493

$$m\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + m_1\rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0.$$

Поэтому одна из величин $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\rho_1}{dt}$ должна быть положительна, другая отрицательна, т. е. радиус одного кольца должен увеличиваться, радиус другого уменьшаться. Какой из радиусов увеличивается, можно обнаружить из уравнения для $\tau\chi$ (стр. 492), которое при наших обозначениях напишется так:

$$-\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\rho \rho_1} \kappa \frac{\partial U}{\partial \kappa} \frac{z - z_1}{(\rho + \rho_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Но $z > z_1$, далее:

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial \kappa} = \kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 \vartheta - 1) d\vartheta}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \vartheta)^3}},$$

так же, как и сама величина U всегда положительна; поэтому $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ будет отрицательным, т. е. кольцо, следующее позади, суживается, идущее же впереди расширяется. Затем из формулы для w (стр. 493) следует:

$$-\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho^3}} U + \frac{1}{2} \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho^3}} \kappa \frac{\partial U}{\partial \kappa} \frac{(z - z_1)^2 + \rho_1^2 - \rho^2}{(\rho + \rho_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Значение для $-\frac{\partial z_1}{\partial t}$ мы получаем отсюда, заменяя ρ через ρ_1 , а U и $\kappa \frac{\partial U}{\partial \kappa}$ оставляя без изменения. Так как ρ_1 увеличивается, а ρ уменьшается, то $m_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho^3}}$ и $\rho_1^2 - \rho^2$ — будут увеличиваться, а $m \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1^3}}$ и $\rho^2 - \rho_1^2$ уменьшаться. Так как U и $\kappa \frac{\partial U}{\partial \kappa}$ положительны, то $\frac{\partial z}{\partial t}$ будет все увеличиваться, а $-\frac{\partial z_1}{\partial t}$ все уменьшаться. Но $-\frac{\partial z}{\partial t}$ и $-\frac{\partial z_1}{\partial t}$ суть изменения, которые испытывают первоначальные движения каждого кольца в направлении отрицательных z в зависимости от присутствия другого кольца. Таким образом кольцо, следующее позади, суживаясь, будет перемещаться быстрее; идущее же впереди, расширяясь, будет двигаться все медленнее. Подобным же образом можно вывести и результаты, относящиеся к двум вихревым кольцам с равными радиусами и равными, но противоположно направленными скоростями вращения.